La Ecuación de Euler

V. Sirvent – MA2115

30 de noviembre de 2009

- Es un tipo de ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes variables.

- Ecuación de Euler no homogénea

$$t^n x^{(n)}(t) + b_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1 t x'(t) + b_0 x(t) = g(t).$$

- Ecuación de Euler no homogénea

$$t^n x^{(n)}(t) + b_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1 t x'(t) + b_0 x(t) = g(t).$$

- Si $t \neq 0$, la ecuación se escribe como

$$x^{(n)}(t) + \frac{b_{n-1}}{t} x^{(n-1)}(t) + \cdots + \frac{b_1}{t^{n-1}} x'(t) + \frac{b_0}{t^n} x(t) = \frac{g(t)}{t^n}.$$

- Si $t > 0$, se hace el cambio de variable $t = e^u$, ó $u = \ln t$.

- Si $t > 0$, se hace el cambio de variable $t = e^u$, ó $u = \ln t$.
- $$\frac{du}{dt} = \frac{1}{t} = e^{-u},$$

- Si $t > 0$, se hace el cambio de variable $t = e^u$, ó $u = \ln t$.
- $$\frac{du}{dt} = \frac{1}{t} = e^{-u},$$
- Si $s = s(u) = x(e^u)$:

$$\begin{array}{rcl} s'(u) & = & x'(e^u)e^u \\ s''(u) & = & x''(e^u)e^{2u} + x'(e^u)e^u = x''(e^u)e^{2u} + s'(u) \\ & & \text{ó equivalentemente} \\ x'(t) & = & x'(e^u) = s'(u)e^{-u} \\ x''(t) & = & x''(e^u) = (s''(u) - s'(u))e^{-2u} \\ x'''(t) & = & x'''(e^u) = (s'''(u) - 3s''(u) + 2s'(u))e^{-3u}. \end{array}$$

- Si $t > 0$, se hace el cambio de variable $t = e^u$, ó $u = \ln t$.
- $$\frac{du}{dt} = \frac{1}{t} = e^{-u},$$
- Si $s = s(u) = x(e^u)$:

$$\begin{aligned} s'(u) &= x'(e^u)e^u \\ s''(u) &= x''(e^u)e^{2u} + x'(e^u)e^u = x''(e^u)e^{2u} + s'(u) \\ &\text{ó equivalentemente} \\ x'(t) &= x'(e^u) = s'(u)e^{-u} \\ x''(t) &= x''(e^u) = (s''(u) - s'(u))e^{-2u} \\ x'''(t) &= x'''(e^u) = (s'''(u) - 3s''(u) + 2s'(u))e^{-3u}. \end{aligned}$$

- En general:

$$x^{(k)}(t) = e^{-ku}(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{jk}\, s^{(j)}(u)), \quad \text{con } \alpha_{jk} \in \mathbb{R}.$$

- Sustituyendo $x^{(k)}(t) = e^{-ku}(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{jk}\, s^{(j)}(u))$ en

$$t^n x^{(n)}(t) + b_{n-1}t^{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1 t x'(t) + b_0 x(t) = g(t)$$

- Sustituyendo $x^{(k)}(t) = e^{-ku}(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{jk}\, s^{(j)}(u))$ en

$$t^n x^{(n)}(t) + b_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1 t x'(t) + b_0 x(t) = g(t)$$

- Resulta

$$\begin{gathered}(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn}\, s^{(j)}(u)) + (\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{j,n-1}\, s^{(j)}(u)) b_{n-1} + \\ \cdots + (s''(u) - s'(u)) b_2 + s'(u) b_1 + s(u) b_0 = g(e^u).\end{gathered}$$

- Sustituyendo $x^{(k)}(t) = e^{-ku}(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{jk}\, s^{(j)}(u))$ en

$$t^n x^{(n)}(t) + b_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1 t x'(t) + b_0 x(t) = g(t)$$

- Resulta

$$(\textstyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn}\, s^{(j)}(u)) + (\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{j,n-1}\, s^{(j)}(u)) b_{n-1} + \\ \cdots + (s''(u) - s'(u)) b_2 + s'(u) b_1 + s(u) b_0 = g(e^u).$$

- Es una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes.
  Si $g(t) \equiv 0$ es homogénea.

Independencia lineal de las soluciones

- Si $\{s_1(u), \ldots, s_n(u)\}$ son soluciones de la ecuación homogénea, entonces $x_i(t) = x_i(e^{\ln t}) = s_i(u)$ son soluciones de la ecuación de Euler homogénea.

Independencia lineal de las soluciones

- Si $\{s_1(u), \dots, s_n(u)\}$ son soluciones de la ecuación homogénea, entonces $x_i(t) = x_i(e^{\ln t}) = s_i(u)$ son soluciones de la ecuación de Euler homogénea.
- Si $\{s_1(u), \dots, s_n(u)\}$ son linealmente independientes, entonces $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ también lo son. En efecto: Sean $\gamma_j \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1} \gamma_i x_i(t) = 0 \iff \sum_{i=1} \gamma_i x_i(e^u) = 0 \iff \sum_{i=1} \gamma_i s_i(u) = 0.$$

Como los $s_j(u)$ son L.I. entonces $\gamma_j = 0$ para $j = 1, \dots, n$.

Observación

Si se quiere resolver la ecuación de Euler

$$x^{(n)}(t) + \frac{b_{n-1}}{t}x^{(n-1)}(t) + \cdots + \frac{b_1}{t^{n-1}}x'(t) + \frac{b_0}{t^n}x(t) = \frac{g(t)}{t^n}$$

para $t < 0$, se debe hacer el cambio de variable:

$$t = -e^u.$$

Y se procede de manera similar.

Ejemplo1

- Resolver $t^2x'' + tx' + 4x = 0$, con $t > 0$.

Ejemplo1

- Resolver $t^2x'' + tx' + 4x = 0$, con $t > 0$.
- Haciendo el cambio de variable $t = e^u$ ó $u = \ln t$, se tiene $x'(e^u) = s'(u)e^{-u}$ y $x''(e^u) = (s''(u) - s'(u))e^{-2u}$.

Ejemplo1

- Resolver $t^2x'' + tx' + 4x = 0$, con $t > 0$.
- Haciendo el cambio de variable $t = e^u$ ó $u = \ln t$, se tiene $x'(e^u) = s'(u)e^{-u}$ y $x''(e^u) = (s''(u) - s'(u))e^{-2u}$.
- Sustituyendo en la ecuación nos queda: $(s'' - s') + s' + 4s = 0$ ó $s'' + 4s = 0$.

Ejemplo1

- Resolver $t^2x'' + tx' + 4x = 0$, con $t > 0$.
- Haciendo el cambio de variable $t = e^u$ ó $u = \ln t$, se tiene $x'(e^u) = s'(u)e^{-u}$ y $x''(e^u) = (s''(u) - s'(u))e^{-2u}$.
- Sustituyendo en la ecuación nos queda: $(s'' - s') + s' + 4s = 0$ ó $s'' + 4s = 0$.
- Resolviendo la ecuación homogénea: $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$. P.I.t. $s(u) = c_1 \cos(2u) + c_2 \operatorname{sen}(2u)$.

Ejemplo1

- Resolver $t^2x'' + tx' + 4x = 0$, con $t > 0$.
- Haciendo el cambio de variable $t = e^u$ ó $u = \ln t$, se tiene $x'(e^u) = s'(u)e^{-u}$ y $x''(e^u) = (s''(u) - s'(u))e^{-2u}$.
- Sustituyendo en la ecuación nos queda: $(s'' - s') + s' + 4s = 0$ ó $s'' + 4s = 0$.
- Resolviendo la ecuación homogénea: $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$. P.I.t. $s(u) = c_1 \cos(2u) + c_2 \operatorname{sen}(2u)$.
- Devolviendo el cambio de variable:

$$\begin{aligned} x(t) = x(e^u) &= c_1 \cos(2\ln t) + c_2 \operatorname{sen}(2\ln t) \\ &= c_1 \cos(\ln t^2) + c_2 \operatorname{sen}(\ln t^2). \end{aligned}$$

Ejemplo2

- Resolver $t^2x'' - 3tx' + 3x = 2t^{-1}\ln t$ con las c.i. $x(1) = x'(1) = 0$.

Ejemplo2

- Resolver $t^2x'' - 3tx' + 3x = 2t^{-1}\ln t$ con las c.i. $x(1) = x'(1) = 0$.
- Haciendo el cambio de variable $t = e^u$ ó $u = \ln t$, se tiene $x'(e^u) = s'(u)e^{-u}$ y $x''(e^u) = (s''(u) - s'(u))e^{-2u}$.

Ejemplo2

- Resolver $t^2x'' - 3tx' + 3x = 2t^{-1}\ln t$ con las c.i. $x(1) = x'(1) = 0$.
- Haciendo el cambio de variable $t = e^u$ ó $u = \ln t$, se tiene $x'(e^u) = s'(u)e^{-u}$ y $x''(e^u) = (s''(u) - s'(u))e^{-2u}$.
- Sustituyendo en la ecuación nos queda: $(s'' - s') - 3s' + 3s = 2ue^{-u}$ ó $s'' - 4s' + 3s = 2ue^{-u}$.

Ejemplo2

- Resolver $t^2x'' - 3tx' + 3x = 2t^{-1}\ln t$ con las c.i. $x(1) = x'(1) = 0$.
- Haciendo el cambio de variable $t = e^u$ ó $u = \ln t$, se tiene $x'(e^u) = s'(u)e^{-u}$ y $x''(e^u) = (s''(u) - s'(u))e^{-2u}$.
- Sustituyendo en la ecuación nos queda: $(s'' - s') - 3s' + 3s = 2ue^{-u}$ ó $s'' - 4s' + 3s = 2ue^{-u}$.
- Resolviendo la ecuación homogénea: $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$.
  P.I.t. $s_h(u) = c_1e^{3u} + c_2e^u$.

Ejemplo2

- Resolver $t^2x'' - 3tx' + 3x = 2t^{-1}\ln t$ con las c.i. $x(1) = x'(1) = 0$.
- Haciendo el cambio de variable $t = e^u$ ó $u = \ln t$, se tiene $x'(e^u) = s'(u)e^{-u}$ y $x''(e^u) = (s''(u) - s'(u))e^{-2u}$.
- Sustituyendo en la ecuación nos queda: $(s'' - s') - 3s' + 3s = 2ue^{-u}$ ó $s'' - 4s' + 3s = 2ue^{-u}$.
- Resolviendo la ecuación homogénea: $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$. P.I.t. $s_h(u) = c_1e^{3u} + c_2e^u$.
- Buscamos solución particular de la forma $s_p(u) = \alpha e^{-u} + \beta ue^{-u}$. Sustituyendo en la ecuación nos queda: $\alpha = 3/8$ y $\beta = 1/4$.

- La solución general:

$$\begin{aligned} s(u) &= s_h(u) + s_p(u) = c_1 e^{3u} + c_2 e^{u} + \tfrac{3}{8} e^{-u} + \tfrac{1}{4} u e^{-u}, \\ x(t) &= c_1 t^3 + c_2 t + \tfrac{3}{8t} + \tfrac{1}{4t} \ln t. \end{aligned}$$

- La solución general:

$$\begin{array}{rcl} s(u) & = & s_h(u) + s_p(u) = c_1 e^{3u} + c_2 e^{u} + \frac{3}{8} e^{-u} + \frac{1}{4} u e^{-u}, \\ x(t) & = & c_1 t^3 + c_2 t + \frac{3}{8t} + \frac{1}{4t} \ln t. \end{array}$$

- Utilizando las condiciones iniciales: $x(1) = x'(1) = 0$.
  $x'(t) = 3c_1 t^3 + c_2 - \frac{3}{8t^2} - \frac{1}{4t^2} \ln t + \frac{1}{4t^2}$. Evaluando:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1 + c_2 + 3/8 & = & 0 \\ 3c_1 + c_2 - 3/8 + 1/4 & = & 0, \end{array} \right.$$

  P.L.T. $c_1 = 1/8$, $c_2 = -1/2$.

- La solución general:

$$\begin{aligned} s(u) &= s_h(u) + s_p(u) = c_1 e^{3u} + c_2 e^{u} + \tfrac{3}{8} e^{-u} + \tfrac{1}{4} u e^{-u}, \\ x(t) &= c_1 t^3 + c_2 t + \tfrac{3}{8t} + \tfrac{1}{4t} \ln t. \end{aligned}$$

- Utilizando las condiciones iniciales: $x(1) = x'(1) = 0$.
  $x'(t) = 3c_1 t^3 + c_2 - \frac{3}{8t^2} - \frac{1}{4t^2} \ln t + \frac{1}{4t^2}$. Evaluando:

$$\left\{ \begin{aligned} c_1 + c_2 + 3/8 &= 0 \\ 3c_1 + c_2 - 3/8 + 1/4 &= 0, \end{aligned} \right.$$

  P.L.T. $c_1 = 1/8$, $c_2 = -1/2$.

- La solución es:

$$x(t) = \frac{1}{8} t^3 - \frac{1}{2} t + \frac{3}{8t} + \frac{1}{4t} \ln t.$$